Référence :
Analyse, Xavier Gourdon
Analyse numérique et équations différentielles, Jean-Pierre Demailly

Déf. On dit qu'une application F d'un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est **localement lipschitzienne en la seconde variable** si pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) et $k > 0$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x, x' \in \mathbb{R}^n$ tels que $(t, x) \in V$ et $(t, x') \in V$,

$$||F(t,x) - F(t,x')|| \leq k||x - x'||.$$

Déf. On se donne une équation différentielle

$$(E) : y^{(n)} = F(t, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

et $(t_0, x_0, ..., x_{n-1}) \in \Omega$. On appelle **problème de Cauchy** de (E) en $(t_0, x_0, ..., x_{n-1})$ la recherche d'une fonction $\phi : I \to E$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) solution de (E) et vérifiant $t_0 \in I$, $\phi(t_0) = x_0, ..., \phi^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$.

Lemme. On considère maintenant l'équation différentielle

$$(E) : y' = f(t, y)$$

où $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue et U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. Une fonction $y : I \to \mathbb{R}^m$ est une solution du problème de Cauchy de données initiales (t_0, y_0) si et seulement si

(i) y est continue et, pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in U$

(ii) Pour tout $t \in I$, $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))du$

Théo. *Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un intervalle I voisinage de t_0 dans $\mathbb{R}$ et une application $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ solution de $y' = F(t, y)$ telle que $\phi(t_0) = x_0$. De plus, il y a unicité pour le problème de Cauchy de cette équation différentielle en (t_0, x_0).*

Démonstration. Soit $(t_0, x_0) \in \Omega$. Pour tout $r > 0$, on pose

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x - x_0|| \leq r\}$$

et pour tout $\alpha > 0$, $I_\alpha =]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$. Soit V un voisinage compact de (t_0, x_0) dans Ω sur lequel F est k-lipschitzienne en la seconde variable. Notons M un majorant de F sur V. On peut choisir $r > 0$ et $\alpha > 0$ désormais fixés, tels que $I_\alpha \times B_r \subset V$ et $\alpha M < r$. La fonction F est continue, toute solution est donc de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, une application $\phi : I_\alpha \to \mathbb{R}^n$ est solution si et seulement si pour tout $t \in I$, $(t, \phi(t)) \in \Omega$ et $\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(u, y(u))du$.
Posons $\mathcal{F} = \mathcal{C}(I_\alpha, B_r)$, muni de $||.||_\infty$. On sait que I_α est un compact et que B_r est complet (fermé dans un complet) donc $(\mathcal{F}, ||.||_\infty)$ est complet.
Posons, pour $t \in I_\alpha$,

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \\ y(t) & \mapsto & \left(t \mapsto x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^t f(u, y(u))du\right). \end{array}$$

y est une solution de (E) si et seulement si y est un point fixe de ϕ. On va donc vouloir appliquer le théorème du point fixe. Montrons tout d'abord que si $y \in \mathcal{F}$, alors $\phi(y) \in \mathcal{F}$.
Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de I_α convergeant vers t. Montrons que $\phi(y)(t_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \phi(y)(t)$.

$$\begin{array}{rcl} \phi(y)(t_n) & = & x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^t f(u, y(u))du \\ & = & x_0 + \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(u, y(u)) \mathbb{1}_{[\min(t_n, t_0), \max(t_n, t_0)]}(u)}_{g_n(u)} du. \end{array}$$

Par théorème de convergence dominée, on obtient bien le résultat.

Montrons maintenant que, pour tout $t \in I_\alpha$, $\phi(y)(t) \in B_r$.

$$\begin{aligned} ||\phi(y)(t) - x_0|| &= \left|\left|\int_{t_0}^t f(u, y(u))du\right|\right| \\ &\leq \int_{t_0}^t ||f(u, y(u))||du \\ &\leq |t - t_0|M \\ &\leq \alpha M \\ &\leq r \end{aligned}$$

On a bien que $\phi(y) \in \mathcal{F}$. Montrons que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $y, z \in \mathcal{F}$ et pour tout $t \in I_\alpha$,

$$||\phi^p(y)(t) - \phi^p(z)(t)|| \leq \frac{k^p|t - t_0|^p}{p!}||y - z||_\infty.$$

On fait une récurrence sur $p \in \mathbb{N}$. Pour $p = 0$, on a bien le résultat. Supposons maintenant le résultat vrai pour p et montrons le pour $p + 1$.

$$\begin{aligned} ||\phi^{p+1}(y)(t) - \phi^{p+1}(y)(t)|| &= \left|\left|\int_{t_0}^t f(u, \phi^p(y)(u)) - f(u, \phi^p(z)(u))du\right|\right| \\ &\underbrace{\leq}_{f\ k\text{-lipschitzienne}} \left|\int_{t_0}^t k||\phi^p(y)(u) - \phi^p(z)(u)||du\right| \\ &\underbrace{\leq}_{HR} \left|\int_{t_0}^t k\frac{k^p|u - t_0|^p}{p!}||y - z||_\infty du\right| \\ &\leq \frac{k^{p+1}|t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!}||y - z||_\infty \end{aligned}$$

On obtient donc en particulier que, pour tout $t \in I_\alpha$, pour tout $y, z \in \mathcal{F}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$||\phi^p(y)(t) - \phi^p(z)(t)|| \leq \frac{k^p\alpha^p}{p!}||y - z||_\infty$$

Ainsi

$$||\phi^p(y) - \phi^p(z)||_\infty \leq \frac{k^p\alpha^p}{p!}||y - z||_\infty$$

On sait que $\frac{k^p\alpha^p}{p!} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car c'est le terme général d'une série exponentielle. Il existe donc $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{k^p\alpha^p}{p!} < 1$. On a donc que ϕ^{p_0} est une application $\frac{k^p\alpha^p}{p!}$-contractante sur $\mathcal{F}$.
D'après le théorème du point fixe de Banach-Picard, il existe un unique $y \in \mathcal{F}$ telle que $\phi^p(y) = y$. On a alors

$$\phi^p(\phi(y)) = \phi(\phi^p(y)) = \phi(y).$$

L'unicité du point fixe implique que $\phi(y) = y$. L'application ϕ admet donc un unique point fixe d'où le résultat. □